



РОССИЙСКИЕ МАТЕМАТИКИ О РАБОТЕ В. А. КОТЕЛЬНИКОВА «О ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ «ЭФИРА» И ПРОВОЛОКИ В ЭЛЕКТРОСВЯЗИ»

Академик А. Н. Колмогоров

С 1955 года интересы академика А. Н. Колмогорова обратились к теории информации, и его внимание привлекла работа В. А. Котельникова 1933 года «О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи». Позже, начиная с 1956 года, в своих докладах и публикациях Андрей Николаевич неоднократно упоминал эту работу и давал оценку значения и места в теории информации высказанных там идей В. А. Котельникова. Ниже приводятся некоторые выдержки из сборника трудов академика А. Н. Колмогорова «Теория информации и теория алгоритмов»:

«При необычайном богатстве идей, данных в работах самого Шеннона, изложение в них обычно крайне туманно. Лишь позднее в ряде работ чистых математиков для случая стационарно работающих каналов, передающих дискретные сигналы, «теоремы Шеннона» были доказаны безукоризненно и в достаточно общих предположениях. ...»

Далее А. Н. Колмогоров отмечает, что развитие теории информации исследователями более прикладного направления значительно опережает фундаментальные математические исследования.

«Существенные элементы теории информации для непрерывного случая, казалось бы, более трудного, возникли до Шеннона».

«... ближе к работам Шеннона стоят результаты В. А. Котельникова [1], полученные еще в 1933 г. Здесь была сформулирована фундаментальная идея спектральной теории передачи информации при помощи непрерывных сигналов, о которых я говорю подробнее в главе II.

... идея эквивалентности двойной ширины полосы частот числу измерений, приходящихся, в некотором смысле слова, на единицу времени, была, по-видимому, впервые высказана В. А. Котельниковым [1]. В обоснование этой идеи Котельников указывал на то обстоятельство, что функция, спектр которой помещается в полосе ширины $2W$, одно-

значно определяется значениями функции в точках

$$\dots, -\frac{2}{2W}, -\frac{1}{2W}, 0, \frac{1}{2W}, \frac{2}{2W}, \dots, \frac{k}{2W}, \dots$$

Эта же аргументация сохранена и у Шеннона, использующего полученные таким образом представления ...

В теории связи большую роль играет то обстоятельство, что сигналы с ограниченным спектром, помещающимся в полосе ширины 2σ , определяются по дискретной совокупности своих значений, взятых в равноотстоящих друг от друга точках.

В. А. Котельниковым в работе [1] было указано важное применение этого свойства для теории связи. Им было отмечено, что количество информации, содержащееся в задании на отрезке длины T функции со спектром, ограниченным полосой частот ширины 2σ , при больших T эквивалентно количеству информации в задании $2\sigma T/\pi$ действительных чисел. В литературе это утверждение часто именуется теоремой Котельникова. Эту же идею в несколько иной форме высказал также и К. Шеннон». (В 1948 году)¹⁾. [2]

Академик А. Г. Витушкин

В своем очерке «Полвека как один день», опубликованном в 2000 году в сборнике «Математические события XX века», рассматривая проблему цифровой системы записи звука, А. Г. Витушкин остановился на работе В. А. Котельникова «О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи». При этом он отметил следующее.

«В 1933 году намечали созвать Всесоюзный съезд по вопросам реконструкции связи и развития слаботочной промышленности. Владимир Александрович Котельников подготовил доклад «О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи». Съезд не состоялся, но труды были опубликованы.

Основной тезис доклада Котельникова состоял в том, что *количество информации, получаемой по каналу связи, пропорционально ширине полосы пропускаемых частот*. Более строгая формулировка этого утверждения называется теперь в учебниках теоремой Котельникова: целая функция типа σ , суммируемая с квадратом на вещественной оси, представима в виде

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k)q_k(t), \quad \text{где } t_k = \frac{k\pi}{\sigma} \text{ и } q_k(t) = \frac{\sin(\sigma(t-t_k))}{\sigma(t-t_k)}.$$

Действительно, из формулы видно, что «количество информации», т. е. количество независимых чисел, которое дает сигнал со спектром σ за единицу времени, равно $\frac{\sigma}{\pi}$.

¹⁾ Примечание Н. В. Котельниковой

Такие формулы были известны до Котельникова. Его находка — удачный выбор класса функций и понимание возможности приложений. Впервые содержательно обсуждался информационный аспект проблем связи. Его идея стала основой современной теории информации. Результаты Котельникова отмечены многими наградами, среди которых медаль Ломоносова (АН СССР, 1981 г.) и медаль Белла (США, 2000 г.). Доклад Котельникова затрагивал вечную проблему радиосвязи. Если канал связи имеет узкую полосу пропускаемых частот, то принимаемый сигнал неразборчив из-за отсутствия высоких частот. Если используется широкая полоса, то возрастает шум от разного рода помех. Кроме того, всегда была проблема экономии места в эфире. Были попытки обойти эти трудности за счет какого-либо преобразования передаваемого сигнала. Котельников сумел объяснить, что эти попытки не имеют перспективы, остановив тем самым бесполезную деятельность изобретателей информационного «вечного двигателя».

Тезис Котельникова можно уточнить, используя оценки энтропии соответствующего класса функций. А. Н. Колмогоров и В. М. Тихомиров показали (1959 г.), что ε -энтропия (в равномерной метрике) компакта функций, получаемых ограничением на отрезок $[-T, T]$ целых функций типа σ , вещественных и ограниченных по модулю единицей на вещественной оси, асимптотически равна (при малых значениях ε и больших значениях T) величине $\frac{2T\sigma}{\pi} \ln_2 \frac{1}{\varepsilon}$. Получается так, что если всякая функция указанного класса, передаваемая по данному каналу связи, может быть восстановлена на выходе канала с точностью ε , то количество информации, т. е. число двоичных знаков, которое может быть передано по этому каналу связи за единицу времени, асимптотически равно $\frac{\sigma}{\pi} \ln_2 \frac{1}{\varepsilon}$.

Формулу Котельникова в полной мере оценили в конце 70-х, когда появилась возможность заменить аналоговую систему записи сигналов цифровой. В частности, в звукозаписи стоимость нужной для этого цифровой аппаратуры стала приемлемой, а качество воспроизведения, получаемое с компакт-дисков, оказалось почти идеальным. [3]

Литература

1. В. А. Котельников. «О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи», в сб. *Всесоюзный энергетический комитет. Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. По радиосекции* (М: Управление связи РККА, 1933) с. 1–19). См. настоящий сборник с. 90–109.
2. А. Н. Колмогоров. Теория информации и теория алгоритмов. *Сб. трудов*, Стр. 29, 39, 53, 181–182. Москва, Наука, 1987.
3. А. Г. Витушкин. Полвека как один день. *Сборник «Математические события XX века»*, Издательство Фазис, Московское Математическое общество, 2000 г., с. 10–11.